Brook Taylor und seine Vorgänger Marin Mersenne und Galileo Galilei - ihre Bedeutung für Theorie und Praxis der Saitenherstellung

1. Einleitung

Als Saitenhersteller sieht man sich immer wieder vor die Aufgabe gestellt, Saiten nach besonderen Wünschen neu zu berechnen oder vorhandene Saiten zu überprüfen. Die musikalische Vielfalt und die Ansprüche der Berufsmusiker als auch der „Freizeitmusikanten" sind in den letzten Jahren stark gestiegen und viele Menschen entdecken in Museen alte, halbvergessene Musikinstrumente. Solche Instrumente werden dann sehr oft nachgebaut und schließlich benötigt man auch geeignete Saiten dafür, die speziell berechnet und hergestellt werden müssen.
Eine größere Bedeutung haben jedoch Instrumente früherer Jahrhunderte erlangt, wie z.B. die Renaissance- und Barocklaute, die Vihuela, die Barockgitarre und die verschiedenen Gamben, um nur einige zu nennen. Jedes dieser Instrumente weist unterschiedliche Stimmungen und Mensuren (schwingende Saitenlängen) auf und die Saiten müssen deshalb genauestens darauf abgestimmt sein. Und es macht eben auch einen großen Unterschied für die Berechnung und Herstellung einer Saite, ob der Spieler in a´= 440 Hz oder in a´= 415 Hz stimmt bzw. spielt.

Große Verbreitung haben in letzter Zeit auch Musikinstrumente gefunden, wie z.B. verschiedene Arten und Größen von Harfen und Leiern, die für musiktherapeutische Zwecke eingesetzt werden, vor allem in Schulen, anthroposophischen Einrichtungen oder auch Altersheimen. Diese Instrumente haben oft bis zu fünfzig und mehr Saiten sowie unterschiedliche Stimmungen und Mensuren. Ihre Besaitung besteht aus Nylon-, Stahl-, Bronze- oder Messingsaiten. Der Leser wird daher unschwer erkennen, daß bei den genannten Renaissance- und Barockinstrumenten auf gar keinen Fall Standardsaiten verwendet werden können.
Sobald man als Saitenmacher alle benötigten Angaben wie Tonhöhe, schwingende Saitenlänge (Mensur), adäquate bzw. gewünschte Saitenzugkraft und bevorzugtes Saitenmaterial erhalten hat, wie z.B. Darm, Nylon (Polyamid), Stahl, Bronze oder Messing, kann man darangehen, die Saite zu berechnen. Da man nun immer wieder mit den oben erwähnten Parametern bei der Saitenberechnung zu tun hat, interessiert es einen irgendwann einmal, woher die Erkenntnisse über die Saitenschwingungen eigentlich stammen. Mir ist es vor einiger Zeit so ergangen und so habe ich zu forschen begonnen. Die Ergebnisse habe ich in dem folgenden Beitrag zusammengefaßt.

2. Kleine Vorgeschichte

Bereits in der Antike hatte sich die Wissenschaft mit Untersuchungen auf akustischem Gebiet beschäftigt. Hier sind vor allem Pythagoras, Aristoxenes, Boethius und Quintilianus zu nennen. Der erste Akustiker war jedoch derjenige Unbekannte, der zuerst herausgefunden hatte, daß gespannte Saiten Töne erzeugen und daß kurze Saiten höher als lange klingen.
Doch erst Galileo Galilei (1564-1642) knüpfte wieder an die Tradition der Antike an, indem er systematisch die Abhängigkeit der Tonhöhe von Saitenlänge, Saitendicke und Saitenzugkraft studierte. In den „Discorsi" berichtet er über das Gesetz ihrer Abhängigkeit. Zu ungefähr der gleichen Zeit gelangte Marin Mersenne (1588-1648) zu den gleichen Ergebnissen, die er in der „Harmonie Universelle" niederlegte. Beide Forscher wußten bereits, daß die Tonhöhe einer Saite durch die Zahl ihrer Schwingungen in der Zeiteinheit bestimmt

wird. Brook Taylor (1685-1731) leitete schließlich die Formel für die Eigenschwingungen einer Saite ab.[1]
Wie bereits erwähnt, sind die Gesetze für die Schwingungen von Saiten etwa zeitgleich mit Galileo Galilei von dem französischen Franziskanermönch Marin Mersenne entdeckt und bis in die 40-er Jahre unseres Jahrhunderts nach ihm benannt worden.[2] Mersenne wurde 1588 in Oizé, département Maine, geboren., und studierte Logik, Physik, Metaphysik, Mathematik und Theologie. 1611 trat er in den Orden der Pères minimes ein und wurde einer der großen Universalgelehrten seiner Zeit. Die Existenz Gottes zu erkennen blieb sein höchstes Ziel. Dazu diente ihm vor allem die Mathematik mit ihren damals üblichen Unterteilungen Physik, Chemie, Astronomie und Musik.[3]

3. Die Mersenneschen Gesetze
1636 erscheint in Paris sein Werk „Harmonie Universelle", welches ziemlich die gesamte Musikwissenschaft des 17. Jahrhunderts enthält[4] und wo er sich ausführlich mit den Gesetzen der schwingenden Saite befaßt hat.

1. Mersennesche Gesetz:
„Das Verhältnis der Schwingungszahlen aller Arten von Saiten ist umgekehrt zu deren Längen." [5]

Das bedeutet: Man hat zwei Saiten von gleicher Beschaffenheit und gleicher Saitenzugkraft, wobei die eine doppelt so lang ist wie die andere. Dann ist die Schwingungszahl der kurzen noch einmal so groß wie die der langen Saite. Eine Verkürzung der schwingenden Saitenlänge auf die Hälfte ergibt also die doppelte Tonhöhe und damit die nächsthöhere Oktave.
Allgemein kann man daher sagen: Je kürzer die Mensur, desto höher ist, unter sonst gleichbleibenden Verhältnissen, der Ton und umgekehrt. An anderer Stelle weist Mersenne noch einmal auf diesen Zusammenhang hin: *„Es ist gewiß, daß eine Saite, welche auf eine Laute oder ein anderes Instrument gespannt ist, einen umso tieferen Ton ergibt, je länger sie ist und einen umso höheren, je kürzer sie ist."* [6]

Dieses 1. Mersennesche Gesetz könnte genausogut von Galilei stammen, denn dieser schreibt in seinen „Discorsi" : „.... die Saite eines Monochordes läßt den Grundton hören, und dessen Octave, wenn eine Stütze in der Mitte angebracht wird...." [7], d.h., die Verkürzung der Saitenlänge auf die Hälfte ergibt die Oktave.
Galilei fährt fort: „Auf dreierlei Weise können wir den Ton einer Saite erhöhen, durch Verkürzung, durch Spannung (gemeint ist Saitenzugkraft, der Verfasser) und durch

---

[1] Werner Lottermoser: Akustik, Geschichte in: Freidrich Blume (Hg.): Die Musik in Geschichte und gegenwart (MGG), band 1, Kassel und Basel 1949-1951, spalte 211-214
[2] Hellmut Ludwig, Marin Mersenne und seine Musiklehre, in: Beiträge zur Musikforschung, herausgegeben von Max Schneider, Halle/Saale-Berlin 1935, S. 50-53
[3] Hans-Heinz Dräger, „Mersenne, Marin" in: MGG, Band 9, Kassel-Basel-New York 1960-1961, Spalte 131-134
[4] Hermann Mendel und August Reissmann, Musikalisches Conversations-Lexicon, 7. Band, Berlin 1877, S. 134
[5] Marin Mersenne, Harmonie Universelle, Paris 1636, Neudruck Paris 1963, 1. Band, Livre Troisième, Des mouvements & du son des chordes, Proposition I, S. 157: „ La raison du nombre des retours de toutes sortes de chordes est inverse de leurs longueurs."
[6] Marin Mersenne, Harmonie Universelle, Proposition IX, S. 174: „ Il est certain qu`un chorde esgalement tendue sur un luth, ou sur un autre instrument, fait un son d´autant plus grave qu`elle est plus longue, & plus aigu qu`elle est plus courte..."
[7] Arthur von Oettingen, Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend, Leipzig 1890, S. 87, Übersetzung der „Discorsi e Demonstrazioni matematiche" von Galileo Galilei, Leyden 1636

Unterstützung." [8]Hierbei ist Unterstützung wieder gleichbedeutend mit Verkürzung, z.B. auf dem Monochord, wie wir soeben gesehen haben.

2. Mersennesche Gesetz:

„Die Schwingungen verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Gewichten oder Kräften, die die Saite spannen." [9]

Oder: „Die Schwingungszahlen mehrerer Saiten von sonst gleicher Beschaffenheit verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den spannenden Gewichten." [10]
Im modernen Französisch liest sich dieser Zusammenhang wie folgt: „Pour deux cordes de meme épaisseur, le nombre des battements est proportionnel à la racine carrée du poids des tendeurs." [11]
Im physikalischen Verständnis des frühen 20. Jahrhunderts hat er sich wie folgt ausgedrückt: „ ... daß wir durch das 4-fache Gewicht die 2-fache Schwingungszahl hervorbringen...." [12]
Mersenne erläutert dazu: „Darum genügt es nicht, eine Saite doppelt so stark zu spannen, um sie zweimal so schnell schwingen zu lassen, sondern man muß sie viermal so stark ausspannen."[13]
Er führt dazu weiter aus: „Nehmen wir an, man will wissen, welches Gewicht man benutzen muß, um eine Saite eine Oktave höher steigen zu lassen........ denn wenn man annimmt, daß das Gewicht vier Pfund betragen solle, so bräuchte man sechzehn Pfund, um die gleiche Saite eine Oktave steigen zu lassen ...... was zeigt, daß das Gewicht, welches die Saite eine Oktave tiefer setzt, ein Viertel des anderen Gewichtes betragen muß." [14]
Mit anderen Worten: Man benötigt, unter sonst gleichbleibenden Verhältnissen, das vierfache Gewicht, um die Oktave zu erhalten.
Dieser Zusammenhang ist bei Galileo Galilei wie folgt formuliert:
„Bei gleicher Länge und Beschaffenheit erhalten wir durch Anspannen die Octave, aber es genügt hierzu nicht die doppelte Kraft, sondern die vierfache; war sie zuerst mit einem Pfund gespannt, so brauchen wir deren vier, um die Octave zu erhalten." [15]

3. Mersennesche Gesetz:

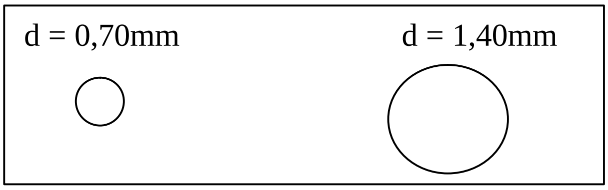
„Die Schwingungszahlen von Saiten unterschiedlicher Durchmesser verhalten sich umgekehrt proportional zu diesen."

Diese modern formulierte Abhängigkeit liest sich bei Mersenne wie folgt: „ ... denn alle Experimente zeigen, daß der Durchmesser einer Saite, die gegenüber einer anderen von gleicher Länge und gleicher Spannung eine Oktave tiefer klingt, doppelt so groß ist wie der Durchmesser dieser dünneren Saite. Woraus folgt, daß die dicke Saite die dünnere viermal

---

[8] Arthur von Oettingen, a.a.O., S. 87
[9] Marin Mersenne, a.a.O., Prop. VI, S. 169 : „...que les tremblemens sont en raison sous-doublée des poids, ou des forces qui bandent la chorde ..."
[10] Paul Otto Apian-Bennewitz, Die Geige, herausgegeben von Otto Möckel, 2. Auflage, Leipzig 1920, S. 26
[11] Robert Lenoble, Mersenne ou la naissance du mécanisme, in: Bibliothèque d´histoire de la philosophie, Paris 1943, S. 483
[12] Paul Otto Apian-Bennewitz, a.a.O., S. 26
[13] Marin Mersenne, Harmonie Universelle, a.a.O., Prp. VI., S. 169: „ C´est pourquoy il ne suffit pas de bander une chorde deux fois plus fort pour la faire mouvoir deux fois plus viste, mais il la tedre quatre fois plus fort."
[14] Marin Mersenne, Harmonie Universelle, a.a.O., Prop. XIV, S. 184: „Supposons que l´on vueille scavoir de quel poids on doit user pour faire monter une chorde á l´Octave ... car si l´on suppose que le poids soit de quatre livres, il faudra seize livres pour monter la mesme chorde à l´Octave ... ce qui montre que le poids, qui met la chorde à l´Octave en bas, doit estre sous-quadruple de l´autre poids."
[15] Arthur von Oettingen, a.a.O., S. 87

enthält." [16]Die Aussage ist natürlich korrekt, der doppelte Durchmesser ergibt die halbe Frequenz.



Mit „... daß die dicke Saite die dünnere viermal enthält..." meint er den Querschnitt. Auch dies ist richtig, denn Verdoppelung des Durchmessers bedeutet Vervierfachung des Querschnittes und damit die nächsttiefere Oktave. Dies alles gilt unter der Voraussetzung, daß die Saiten gleiche Länge, gleiche Dichte und das gleiche spannende Gewicht besitzen.

4. Mersennesche Gesetz:

„Die Schwingungszahlen von Saiten aus unterschiedlichen Materialien verhalten sich umgekehrt proportional zu den Quadratwurzeln ihrer Dichten."

Dieser Zusammenhang ist, wie die drei vorhergehenden Gesetze auch, erst später so formuliert worden. Im Originaltext heißt es: „ Die Tiefe der Töne ist umso größer, je weniger spröde die Körper sind, von denen sie kommen und je besser ihre Teile verbunden, und je besser sie miteinander vereinigt sind." [17]
Und an anderer Stelle: „Die Dichte und die Dünne der Körper ist, so scheint es, der Grund dafür, daß die von ihnen erzeugten Töne unterschiedlich in ihrer Tiefe und Höhe sind..."[18]
Während Mersenne also die Bedeutung der Dichte sehr wohl erkannt hat, kann er sie in seinem vierten Gesetz nur umschreiben. Der Grund hierfür liegt darin, daß zu seiner Zeit die spezifischen Gewichte, d.h. die Dichte der Stoffe, zahlenmäßig noch nicht bekannt bzw. festgelegt waren.

Ähnlich ist es bei Galilei zu lesen, der den Zusammenhang zwischen Frequenz und Dichte wie folgt abhandelt: „ ... daß von den drei Arten, Töne höher werden zu lassen, diejenige, welche ihr dem Querschnitt der Saite zuspracht, besser auf das Gewicht derselben zu beziehen wäre. Bei gleichem Material gilt stets dasselbe Verhältnis, so muß z.B. von zwei Darmsaiten die eine viermal dicker sein, um die Octave zu geben, aber auch bei Messingsaiten gilt dasselbe. Soll ich aber eine Octave herstellen aus einer Darm- und einer Messingsaite, so ist das Verhältnis nicht das vierfache für die Dicke, wohl aber kann das vierfache Gewicht genommen werden....„[19] Mit Gewicht ist aber nicht die Masse, sondern das spezifische Gewicht, also die Dichte, gemeint, wie wir gleich sehen werden. Er bringt nun als Beispiel die beiden Klaviere, von denen das eine mit Goldsaiten, das andere mit Messingsaiten bespannt ist und sagt, daß die Töne der Saiten des Goldsaiten-Klavieres bei gleicher Länge, Spannung und Dicke doppelt so tief sein werden wie die des Messingsaiten-Klavieres.[20]

---

[16] „... car toutes les experiences monstrent que le diametre de la base de la chorde, qui fait l ´Octave en bas contre une autre chorde d´esgale longueur & tension, est double du diametre de la base de cette chorde plus deliee. D´ou s´ensuit que la grosse chorde contient quatre fois la moindre...", vgl. Marin Mersenne, Harmonie Universelle, a.a.O., Prop. IX, S. 174

[17] Marin Mersenne, Harmonie Universelle, a.a.O., Prop. XVIII, S. 198: „ La gravité des sons est d´autant plus grande que les corps d´où ils viennent sont moins cassans, & que leurs parties sont mieux liees, & mieux unies les unes aux autres..."

[18] Marin Mersenne, Harmonie Universele, a.a. O., Prop. XVIII, S. 201: „La densité & la rareté des corps, est ce semble, cause que les sons qu´ils produisent sont differens quant au grave & à l´aigu..."

[19] Arthur von Oettingen, a.a.O., S. 89

[20] Arthur von Oettingen, a.a.O., S. 89

Mit dem vierfachen Gewicht, d.h. mit der vierfachen Dichte, klingen Saiten tatsächlich eine Oktave tiefer. Die Bedeutung der Dichte wurde also klar erkannt, wenn sie beim Gold auch nicht annähernd reichen würde, um die Saite gegenüber Messing um eine Oktave tiefer erklingen zu lassen. Die Werte der Dichte konnten eben zu Zeiten Galileis noch nicht beziffert werden. Die Vervierfachung der Dichte ergibt also die halbe Frequenz, die Reduzierung der Dichte auf ein Viertel ergibt die doppelte Frequenz, oder, einfacher ausgedrückt: Je höher die Dichte, desto tiefer der Ton.

Galileo Galilei wurde am 15.2.1564 zu Pisa geboren und starb am 8.1.1642. Wann er das Material zu seinen „Discorsi" zusammengestellt hat, ist schwer zu sagen. Gedruckt wurden sie 1638, als er bereits unter Aufsicht der Inquisition in Arcetri bei Florenz gefangen gehalten wurde. Ob er seine „Discorsi" lange vor 1638 geschrieben hat, ist gleichfalls kaum festzustellen. Wir wissen nur, daß Galilei seine Entdeckungen, bedingt durch die Verfolgungen, denen er ausgesetzt war, immer erst spät veröffentlicht hat. Jedenfalls befanden sich die „Discorsi" schon vor 1638 in den Händen des Grafen di Noailles, dem der Druck sämtlicher „Discorsi" zu verdanken ist. [21]
Die Beschäftigung Galileis mit den Saitenschwingungen scheint nicht ganz von ungefähr gekommen zu sein, da er selbst die praktische Musikausübung pflegte. „ ...und erlangete so wohl auf dem Clavier, als auch auf der Laute eine solche Vollkommenheit, daß er öfters mit denen vornehmsten Musicis zu Florentz und Pisa es wagete." [22]
Galilei hat die Beziehungen zwischen Schwingungszahl, Länge, Dicke, Spannung (mittels spannender Gewichte) und Material von Saiten experimentell erforscht und in seinen „Discorsi" beschrieben. Weltgeltung erlangte er durch seine Erkenntnisse auf dem Gebiet der Astronomie.
Die Bedeutung des Musiktheoretikers und Mathematikers Marin Mersenne auf dem Gebiet der Saitenschwingungen liegt vor allem darin, den Zusammenhang zwischen Schwingungszahl und Tonhöhe genau erkannt zu haben.
Mersenne hat offenbar einen großen Teil der Gedanken und Werke Galileis gekannt, denn er setzt sich in der Proposition XXIII, auf S. 221 seiner „Harmonie Universelle" damit auseinander.

4.Brook Taylor und seine Formel

Wir wenden uns nun dem englischen Mathematiker Brook Taylor zu. Brook Taylor wurde am 18.8.1685 in Edmonton (Middlesesex) geboren, 1701 kam er nach Cambridge. Hier studierte er anfangs Rechtswissenschaft, später aber wandten sich seine Interessen mehr und mehr der Mathematik und Naturwissenschaft zu. Außerdem beschäftigte er sich nebenbei immer sehr viel mit Musik. Brook Taylor war zuerst zuhause erzogen worden. Taylors Vater behandelte seine große Familie sehr streng und hatte eine verdrießliche Gemütsart, „...die nur der Macht der Musik erliegen würde." Der junge Taylor war musikalisch das fähigste Familienmitglied. Ab 1708 beschäftigte er sich mit den Problemen der Transversalschwingungen von Saiten und mit dem Zentrum der Osczillation. Im Jahre 1709 erwarb er den Grad eines Baccalaureus der Rechte, 1714 die juristische Doktorwürde. Am 3.4.1712 wurde er zum Mitglied der Royal Society in London gewählt.
In seinem Werk: „Methodus Incrementorum Directa & Inversa" behandelt er die Bewegung gespannter Saiten bzw. das Ermitteln der Schwingungszahl einer Saite, wenn Länge, Masse

[21] Arthur von Oettingen, a.a.O., S. 126-128
[22] Galileo Galilei, Schriften - Briefe - Dokumente, herausgegeben von Anna Maudry, Band 2, Briefe - Dokumente, München 1987, S. 217

und spannendes Gewicht gegeben sind.[23] Das Zentrum der Oszillation und die Transversalschwingungen von Saiten waren der Gegenstand von zwei von drei Schriften, die er der Royal Society im Jahre 1712 vorlegte. „De inventione Centri Oscillationis" und „De motu Nervi tensi", beide veröffentlicht in den „Philosophical Transactions". [24]
Taylor hatte der Society auch einen Aufsatz über sein Lieblingsthema „Of Music" übergeben. Dieser wurde jedoch nicht in den „Transactions" veröffentlicht. Wahrscheinlich wurde ein Essay über diese edle Kunst als nicht geistesverwandt mit der Institution dieser gelehrten Körperschaft erachtet....

Kurz nach seiner Wahl in die Royal Society gab er seine Entdeckung einer allgemeinen Reihenentwicklung bekannt, die dann einige Jahre später in der „Methodus Incrementorum" im Druck veröffentlicht worden ist und seinen Namen weltberühmt gemacht hat. [25]
Doch nun zu der Formel, die von wissenschaftlich arbeitenden Musikinstrumenten- und Saitenmachern häufig als „Taylorsche Formel" bezeichnet wird.
Sie lautet:

$$f = \frac{c}{d}\frac{D}{L}\sqrt{\frac{P}{N}}$$

Die Formel ergibt die Frequenz der Pendelschwingung nach Taylor und ist die originale Form der „Taylorschen Formel". Die Formel ist in dieser Form noch nicht für uns anwendbar. In dieser Gleichung wird die Frequenz f der Saitenschwingung gebracht. Taylor leitete die Eigenfrequenz der schwingenden Saite vom äquivalenten, d.h. isochronen, Pendel ab.
Taylor erhält obige Gleichung in einer Form, die erst ausgedeutet werden muß. Er geht von einer nicht näher definierten Schwingungsform aus. Er betrachtet zeitlich benachbarte Zustände, so wie es seit Newton (Differentialgleichung, etwa 1680) üblich geworden war. Er charakterisiert ihre Eigenheiten und Beziehungen, z.B. ähnliche Dreiecke. Wichtig ist die Feststellung, daß die Beschleunigung des Längenelementes (particula) der Saite proportional dem Kehrwert des Kurvenradius ist. Er macht mit dieser Erkenntnis jedoch nicht den Schritt zur partiellen Differentialgleichung der schwingenden Saite, sondern er stellt Analogiebetrachtungen an. Als Analogie wählt er Pendelschwingungen, deren Physik um 1713 offenbar gut bekannt war. Er merkt an, daß jedes Saitenelement mit der gleichen Schwingungsdauer schwingt, jedes jedoch mit anderer Amplitude. Er erinnert an das Zykloidenpendel, welches unabhängig von der Amplitude mit konstanter Schwingungsdauer T schwingt (Isochronie). [26]
Eine komplizierte Ableitung und Deutung der Hilfsgrößen führt uns schließlich zu der heutigen Form der Formel:

---

[23] Methodus Incrementorum Directa & Inversa, Auctore Brook Taylor, London 1717, pars secunda, S. 89: Prop. XXII Prob. XVII, Definire motum Nervi tensi, und S. 91: Prop. XXIII Prob. XVIII. Datis longitudine Nervi, ejusdem pondere, & pondere tendente; invenire tempus periodicum

[24] Philisophical Transactions, Giving some Account of the present Undertakings, Studies, and Labours of the Ingenious, in many considerable parts of the World, Vol. XXVIII. For the Year 1713, gedruckt in London 1714, S. 11 und S. 26 f.

[25] The NEW GROVE Dictionary of Music and Musicians, 19. Band, London 1980, Reprint London 1986, S. 603-604

[26] Der Autor verdankt die Ableitung und den Kommentar der Formel Herrn Diplom-Physiker Dr. rer. nat. Edgar Lieber

$$f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{m'}}$$ [27]

Der Autor erinnert sich bei dieser Gelegenheit an „Finman´s Gesetz der Mathematik", welches lautet: „Keiner will die Formeln der anderen lesen" [28] und bringt daher deren Ableitungen und Details im Anhang.

Die sogenante Taylorsche Formel liefert die Frequenz des Grundtones einer Saite. [29]Sie sagt nichts darüber aus, daß neben der abgeleiteten Grundfrequenz auch noch harmonische Teiltonfrequenzen existieren und sie sagt auch nichts über die Schwingungsform der Saite aus. In der Literatur wird die sog. Taylorsche Formel nur selten als „Taylorsche Formel" bezeichnet. Der Grund dafür mag einerseits darin liegen, daß man Taylor sofort mit der von ihm erfundenen Reihenentwicklung in Verbindung bringt und andererseits darin, daß Mersenne die in der Formel Taylors enthaltenen Zusammenhänge bereits vorher, 1636, experimentell abgeleitet hatte. Es wird ein Proportionalitätsgesetz gewesen sein, z.B. bei konstant gehaltener Frequenz und Verdoppelung der Länge muß die Saitenzugkraft verdoppelt werden, ebenso wie bei der Verdoppelung der Saitenmasse.
Heinrich Auchter beschäftigt sich in seiner Dissertation ausschließlich mit den Schriften Brook Taylors. Er bespricht dabei alle Sätze der „Methodus Incrementorum" und führt aus, daß der dreiundzwanzigste Satz die Schwingungszahl einer Saite aus Länge, Gewicht und Spannung berechne.[30] Aber Auchter spricht nirgends von der „Taylorschen Formel".
Ausdrücklich erwähnt und gedeutet wird sie jedoch von Hermann Griesbach in seinem Werk: „Physikalisch-Chemische Propädeutik." Er sagt, daß Taylor die ersten theoretischen Untersuchungen über Transversalschwingungen von Saiten geliefert hat und interpretiert die Taylorsche Gleichung. Er verwechselt dabei auch die Saitenspannung mit der Saitenzugkraft, d.h. was er als Saitenspannung p bezeichnet, ist in Wirklichkeit die Saitenzugkraft. Da er mit dem Gewicht der Saite operiert, muß er auch die Schwerebeschleunigung g bei der Deutung einführen. Die Taylorsche Gleichung sieht in Griesbachscher Deutung dann wie folgt aus:

$$n = \sqrt{\frac{p \bullet g}{l \bullet q}}$$

wobei p, l und q Spannung (eigentlich Zugkraft), Länge und Gewicht der Saite und g die Beschleunigung durch die Schwere (Erdbeschleunigung) bedeuten. [31]
Griesbach vermutet, daß Taylor die Frequenz des Tones einer Saite durch Rechnung gefunden hat, indem er die Länge der Saite maß, ihre Masse und das spannende Gewicht feststellte, bei dem die Saite den betreffenden Ton ergab und die Erdbeschleunigung mit in Betracht zog.

5. Zusammenfassung

Interessant ist, daß noch Jahrzehnte nach der Taylorschen Veröffentlichung Unklarheiten über die Schwingungsform der Saite bestanden. Berühmte Wissenschaftler wie D´Alembert, die

---

[27] Es bedeuten: f = Frequenz (Hz), l = schwingende Saitenlänge (m), F = Saitenzugkraft (N), m´= Masse pro Längeneinheit (kg/m)

[28] Arthur Bloch, Gesammelte Gründe, warum alles schiefgeht, was schiefgehen kann, Murphy ´s Gesetze in einem Band, Murphy ´s Law, aus dem Amerikanischen, München 1991

[29] Genau genommen wird die Halbschwingung abgeleitet, wie wir gleich noch sehen werden.

[30] Heinrich Auchter, Brook Taylor, der Mathematiker und Philosoph, Beiträge zur Wissenschaftsgeschchte der Zeit des Newton-Leibniz-Streites, Inaugural-Dissertation, Marburg 1937, S. 3 und S. 17
Anmerkung des Autors: Im 23. Satz wird genau genommen mit Länge, Masse und Saitenzugkraft operiert. Die Saitenzugkraft darf jedoch nicht mit der Saitenspannung verwechselt werden!

[31] Zur Griesbachschen Formel vergleiche Anhang.

Bernoullis, L. Euler, verfaßten Streitschriften über die Schwingungsform der Saite. Erst nach Kenntnis und Lösung der Differentialgleichung der schwingenden Saite war eine Lösung des gesamten Komplexes möglich geworden. Die erst sehr viel später entdeckten Komplikationen zum Problem, nämlich Biegesteifigkeit der Saite, Nichtlinearität der Saitenschwingungen und Rotationsträgheit der Saitenelemente konnten natürlich in der Zeit Taylors nicht behandelt werden.
Abschließend läßt sich feststellen, daß von Taylor eine Formel für die Halbschwingung des Grundzustandes der Saite gewonnen worden ist. Wenn wir diese Formel als Taylorsche Formel bezeichnen, so tragen wir dem wissenschaftlichen Verdienst Brook Taylors voll Rechnung.

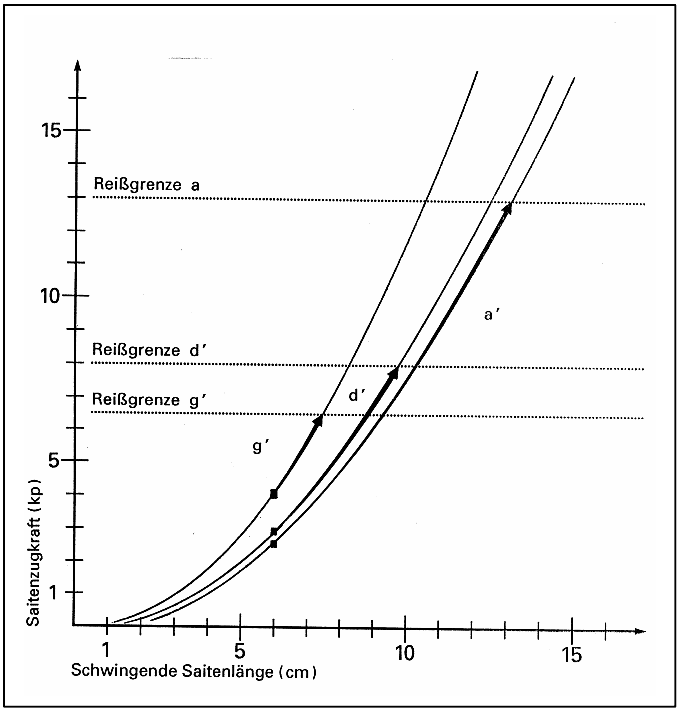
6. Anwendungsbeispiel

„Neue Saiten aufziehen" ist in der Praxis manchmal nicht ganz so einfach, wie es sich im Sprichwort anhört. Wir stellen uns einen Lautenbauer in seiner romantischen Werkstatt vor, in der fertige und halbfertige Lauten und Theorben zu sehen sind. Er hat gerade für einen Kunden eine Theorbe mit Mensur 100 cm restauriert und soll nun noch zwei neue Darmsaiten aufziehen, ein g´ für den ersten und ein d´ für den zweiten Chor. Zu seiner großen Verblüffung stellt er fest, daß sein Vorrat an Theorbensaiten erschöpft ist. Was tun ?
Er findet eine blanke Darmsaite mit Durchmesser 0,39 mm, von der er weiß , daß er sie auf Lauten mit Mensur 60 cm als g´- Saite mit einer Zugkraft von 3,5 kp (34,3 N) einsetzt. Er fragt sich: Kann ich diese g´- Saite auch für die Theorbe benutzen ?

Nun fällt ihm eine Diagramm ein, welches er sich in Anwendung der sog. Taylorschen Formel und in Kenntnis der Zugfestigkeit blanker Darmsaiten einmal gezeichnet hat. Er betrachtet es und stellt fest, daß ihm die Laute-g´-Saite theoretisch bei einer schwingenden Saitenlänge von 75 cm reißen würde. (Praktisch würde sie jedoch schon vorher, etwa bei 70 cm Mensur, abreißen). Mit einer Lauten- d´- Saite (Durchmesser 0,46 mm, 2,8 kp (27,4 N) für Mensur 60 cm würde er dagegen mit theoretischen 99 cm Saitenlänge schon fast an seine Mensur 100 cm herankommen, in der Praxis würde ihm diese Saite jedoch auch schon bei spätestens 94 cm reißen. Erst bei einer Lauten -a - Saite mit Durchmesser 0,62 mm für Mensur 60 cm würde es klappen und diese könnte problemlos als a - Saite für den 3. Chor (aber eben nicht als g´- oder d´- Saite!) auf seine Theorbe aufgezogen werden.[32]

DIAGRAMM: Anstieg der Saitenzugkraft bei wachsender Mensur.
Dargestellt am Beispiel dreier blanker Darmsaiten, g´, d´ und a.

[32] Der Theorbenbauer weiß natürlich in Wirklichkeit, daß ein g´ und ein d´ bei den langen Mensuren der Theorben nicht möglich ist und nie möglich war und daß daher die ersten beiden Chöre um 1 Oktave tiefer gestimmt werden müssen. Dies tut unserem Beispiel jedoch keinerlei Abbruch. Es erklärt diese Tatsache nur noch zusätzlich.



Aber nicht nur der Instrumentenbauer oder Saitenhersteller benötigt die Formel als „tägliches Handwerkszeug". Vor allem auch der Restaurator alter Musikinstrumente kommt ohne sie nicht aus. Ein Beispiel möge dies zeigen: Unser Restaurator soll auf einer Barockgitarre die fehlende h - Saite aus blankem Darm ersetzen. Dazu muß er natürlich deren Durchmesser kennen bzw. bestimmen können. Wie könnte er vorgehen ?
Er könnte die auf dem Instrument noch vorhandene Original - e´- Saite als Maßstab nehmen, ihren Durchmesser z.B. mit 0,46 mm feststellen. Die schwingende Saitenlänge mißt er mit 60 cm. Nun besitzt er alle Daten , um die Zugkraft der vorgefundenen blanken Darm . e´- Saite zu berechnen:

$$f = 4 \bullet l^2 \bullet f^2 \bullet m'$$

m´: Masse pro Längeneinheit (kg/m)

$$F = 34{,}3N(3{,}5kp)$$

Diese Saitenzugkraft soll nun auch die h - Saite erhalten. Zur Berechnung des gesuchten Durchmessers formt er die Formel um nach:

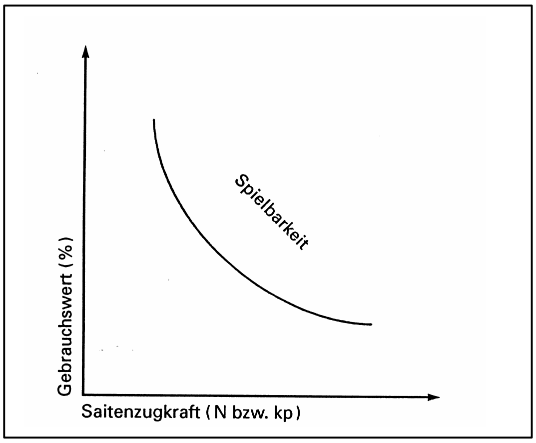
$$d = \sqrt{\frac{p}{f^2 l^2 pr}}$$

r : Dichte (kg/m³)

und setzt seine Werte ein. Er erhält den Durchmesser der h - Saite mit 0,61 mm und kann sich nun eine solche Saite besorgen und auf das Instrument aufziehen.

7. Ausblick

Indem man die sog. Taylorsche Formel mathematisch richtig anwenden kann, hat man allerdings noch lange nicht den „Stein der Weisen" gefunden. Eine so errechnete Saite ist nicht automatisch auch eine qualitativ gute Saite. Angenommen, man soll den Durchmesser einer blanken e´- Saite aus Nylon für eine Barockgitarre mit Mensur 63 cm berechnen. Wenn wir nun z.B. als Saitenzugkraft 6 kp (58,8 N) statt der üblichen 3,5 kp (34,3 N) einsetzen, so erhalten wir als Durchmesser 0,66 mm statt der üblichen 0,50 mm. Eine solche Saite würde zwar lauter als die Gewohnte klingen, sie würde aber auch viel schwerer zu spielen sein. Während man bei der normalen, dünneren Saite nur eine Kraft von 0,83 N bzw. von 84 Gramm aufwenden muß, um sie beim Spielen um 3 mm auszulenken, sind bei der dickeren Saite bereits 1,43 N bzw. 145 Gramm nötig.



Man muß also kein Physiker sein, um zu erkennen, daß eine sehr hohe Saitenzugkraft die Spielbarkeit und damit den Gebrauchswert einer Saite stark vermindert.
Aber auch noch aus einem anderen, nicht minder wichtigen Grund, ist die Kenntnis der adäquaten Saitenzugkraft sehr wichtig: Eine zu hohe Saitenzugkraft kann zu schwerer Beschädigung des Instrumentes führen.

8. Saitenauswahl - ohne die Formel ?

Das Auswählen und auch Aufziehen der Saiten muß für den Musikanten früher ein mittleres Abenteuer gewesen sein. Er wird sich dabei oft gefragt haben: Reicht die Zugfestigkeit des Saitenmaterials aus, um die gewünschte Tonhöhe zu erreichen, oder wird mir die Saite vorher schon reißen ? Oder: Habe ich die Stärke der Saite so dick gewählt, daß sie mir das Instrument beschädigen könnte ?
Auch falls die Gesetzmäßigkeiten Galileis und Mersennes den Musikern bekannt gewesen sein sollten, was nicht sehr wahrscheinlich ist, so dürfte es ihnen nur wenig genützt haben, da ein formelmäßiger Zusammenhang noch fehlte. Sie hatten auch keine Möglichkeit, den Saitendurchmesser einigermaßen genau festzustellen, denn die Mikrometerschraube mußte erst noch erfunden werden.
Hier war also die persönliche Erfahrung und die mündliche Überlieferung gefragt. Aber nicht nur sie. Walter Salmen berichtet, daß der mittelalterliche Spielmann sein Instrument z.B. nicht nur spielen, sondern auch mit Saiten bespannen und teilweise sogar selbst bauen können mußte. Der weitgehend unbekannt gebliebene helvetische Dichter Amarcius schrieb in einem um die Mitte des 11. Jahrhunderts entstandenen Gedicht, daß der „chitarrista" selbst die

Spielsaiten aus Schafsdärmen anfertigen (und sein Instrument in einer Ochsenhaut verpackt oder unter dem Mantel verborgen transportieren) mußte ...[33]
Und sicher nicht unbegründet findet sich im Minnelied „Der Tannhuser" der folgende Vers: „Heia, nu hei! Des videlaeres seite der ist en zwei!" [34]

9. Schlußbetrachtung
Mit einigen Bemerkungen zum Thema „Saitenherstellung heute" will ich meinen Beitrag schließen.
Als Material für blanke Saiten verwendet man, je nach Art der Saite, Darm, Nylon-Monofilament, bestehend aus Polyamid, seit einigen Jahren auch sogenanntes Carbon, bestehend aus Polyvinylidenfluorid, sowie Drähte aus Stahl, Bronze oder Messing.
Bei den umsponnenen Saiten wird der Umspinndraht, ebenfalls wieder abhänig von der Saitenart, sowohl von Hand als auch mittels elektronischer Spinndraht-Führung, auf den Saitenkern aufgewickelt. Bestimmte Saiten für Streichinstrumente werden bevorzugt von Hand besponnen, während z.B. bei der Herstellung von Gitarresaiten die elektronische Drahtführung vorherrscht.
Von der jeweiligen technischen Einrichtung eines Saitenherstellers einmal abgesehen, gibt es keine großen Geheimnisse bei der Saitenherstellung. Bei der Materialauswahl und -beschaffung und bei der Dimensionierung sowohl blanker als auch umsponnener Saiten ist allerdings das Fachwissen des Saitenherstellers sehr gefragt. Er muß sich nämlich hierbei mit sehr unterschiedlichen physikalischen Parametern auseinandersetzen, wie z.B. :

- Zugfestigkeit
- Dichte
- Dehnung
- Bruchdehnung
- Elastizitäts-Modul
- Härte

Nur durch das Wissen um die unterschiedlichen akustischen Wirkungen dieser Parameter, durch die bestmögliche Kombination der verschiedenen Saitenmaterialien und die Wahl des jeweils am besten angepaßten Herstellungsverfahrens kann ein wirklich harmonischer Saitenklang erreicht und auch immer wieder reproduziert werden. In diesem Bereich allerdings halten manche Saitenhersteller das am Geheimsten, was sie nicht wissen.

Literaturverzeichnis

- Auchter, Heinrich, Brook Taylor, der Mathematiker und Philosoph, Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte der Zeit des Newton-Leibniz-Streites, Inaugural-Dissertation, Marburg 1937
- Apian-Bennewitz, Die Geige, herausgegeben von Otto Möckel, 2. Auflage, Leipzig 1920
- Bloch, Arthur, Gesammelte Bände, Warum alles schiefgeht, was schiefgehen kann, Murphy´s Gesetze in einem Band, Murphy´s Law, aus dem Amerikanischen, München 1991
- Dräger, Hans-Heinz, „Mersenne, Marin", in : Friedrich Blume (Herausgeber), Die Musik in Geschichte und Gegenwart (MGG), Band 9, Kassel-Basel-New York 1960-1961
- Griesbach, Hermann, Physikalisch-Chemische Propädeutik, Zweiter Band, Leipzig 1915
- Von der Hagen, Friedrich Heinrich, Minnesinger, Deutsche Liederdichter des zwölften, dreizehnten und vierzehnten Jahrhunderts, zweiter Band, Leipzig 1838, Vers 61b

[33] Walter Salmen, Der Spielmann im Mittelalter, in: Innsbrucker Beiträge zur Musikwissenschaft, Band 8, Innsbruck 1983, S. 81
[34] Von der Hagen, Friedrich Heinrich, Minnesinger, Deutsche Liederdichter des zwölften, dreizehnten und vierzehnten Jahrhunderts, zweiter Band, Leipzig 1838, Vers 61b

- Lenoble, Robert, Mersenne ou la naissance du mécanisme, in: Bibliothèque d´histoire de la philosophie, Paris 1943
- Lottermoser, Werner. „Akustik, Geschichte", in MGG, Band 1, Kassel und Basel 1949-1951
- Ludwig, Helmut, Marin Mersenne und seine Musiklehre, in: Beiträge zur Musikforschung, herausgegeben von Max Schneider, Halle/Saale-Berlin 1935
- Mendel, Hermann und Reissmann, August, Musikalisches Conversations-Lexicon, 7. Band, Berlin 1877, Eine Encyklopädie der gesammten musikalischen Wissenschaften, Für Gebildete aller Stände
- Mersenne, Marin, Harmonie Universelle, 1. Band, Livre Troisième, Des mouvements & du son des chordes, Paris 1636, Neudruck Paris 1963
- Oettingen, Arthur von, Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die mechanik und die Fallgesetze betreffend, Leipzig 1890. Übersetzung der „Discorsi e Demonstrazione matematiche" von Galileo Galilei, Leyden 1636
- Philosophical Transactions, Giving some account on the present Undertakings, Studies, and Labours of the Ingenious, in many considerable parts of the World, Vol. XXVIII., For the Year 1713, London 1714
- Salmen, Walter, Der Spielmann im Mittelalter, in: Innsbrucker Beiträge zur Musikwissenschaft, Band 8, Innsbruck 1983
- Taylor, Brook, Methodus Incrementorum Directa & Inversa, pars secunda, London 1717
- The NEW GROVE Dictionary of Music and Musicians, 18. Band, London 1980, Reprint London 1986, S. 603-604